

MODELIZACIÓN DE LA VOLATILIDAD DEL TIPO DE INTERÉS A CORTO PLAZO*

Francisca Benito, Ángel León y Juan M. Nave**

WP-EC 2002-28

Correspondencia a Francis Benito, Dpto. de Economía Financiera, Contabilidad y Marketing,
Universidad de Alicante, Apdo. de Correos 99, E-03080 Alicante, E-mail: francis.benito@ua.es.

Editor: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.

Primera Edición Octubre 2002

Depósito Legal: V-4036-2002

Los documentos de trabajo del IVIE ofrecen un avance de los resultados de las investigaciones económicas en curso, con objeto de generar un proceso de discusión previo a su remisión a las revistas científicas.

* Los autores quieren agradecer a Eliseo Navarro, Alfonso Novales, Antonio Rubia y un evaluador anónimo del IVIE sus observaciones y sugerencias. También se encuentran en deuda con Antonio García de la Oficina de Estadística y Central de Balances del Banco de España, desde donde nos ha resuelto con extremada amabilidad todas las dudas surgidas en la elaboración de la base de datos con la que se ha trabajado. Lógicamente, se asumen por los autores todos los errores que contenga el trabajo.

** F. Benito y A. León: Universidad de Alicante; J.M. Nave: Universidad de Castilla-La Mancha.

MODELIZACIÓN DE LA VOLATILIDAD DEL TIPO DE INTERÉS A CORTO PLAZO

Francisca Benito, Ángel León y Juan M. Nave

RESUMEN

Este trabajo se centra en la modelización de la volatilidad de los cambios del tipo de interés a corto plazo. Para ello se estiman y comparan distintos modelos de heteroscedasticidad condicional agrupados en tres bloques: (1) los modelos Nivel; (2) los modelos GARCH; y (3) los modelos Mixtos que combinan los efectos recogidos por los anteriores. El análisis realizado revela la superioridad de los modelos Mixtos, confirmando las conclusiones de Brenner et al. (1996). Asimismo, se detecta cierta asimetría en la respuesta de la volatilidad condicional del tipo de interés a corto plazo frente a sus innovaciones.

Palabras clave: Tipo de interés a corto plazo; Heteroscedasticidad condicional; Modelos GARCH; Modelos unifactoriales; Estructura temporal de los tipos de interés.

Clasificación JEL: C22; E43.

ABSTRACT

This paper focuses on modelling the short-term interest rate. We estimate and compare different conditional heteroskedasticity models which are divided into three groups: (1) the Levels models; (2) the GARCH models; and (3) the Mixed models which take into account the effects in both (1) and (2). The empirical results show that the Mixed models make the best performance according to the conclusions by Brenner et al. (1996). There is also evidence for an asymmetric behaviour in the conditional heteroskedasticity.

Keywords: Short term interest rate; Conditional heteroskedasticity; GARCH models; unifactorial models; Term structure of interest rates.

1. Introducción

La dinámica del tipo de interés a corto plazo recibe una considerable atención en la literatura financiera puesto que constituye el principal factor utilizado en la modelización de la estructura temporal de los tipos de interés, herramienta a su vez indispensable en la valoración y gestión de los activos financieros de renta fija, de sus derivados y de las carteras que los integran. Sin embargo, no existe consenso unánime sobre la mejor manera de modelizar el tipo de interés a corto plazo y, en particular, sobre la modelización concreta de su volatilidad, pieza clave, al menos desde un punto de vista teórico, en la determinación de las primas de riesgo.

La modelización de la dinámica del tipo de interés a corto plazo puede llevarse a cabo con modelos en tiempo discreto o continuo; utilizando uno o varios factores; y trabajando con argumentos de arbitraje o de equilibrio. En este trabajo nos centramos en los modelos en tiempo continuo, desarrollados tanto en contextos de equilibrio general como mediante argumentos de arbitraje, y con un único factor, en donde dicho factor viene representado por los movimientos del tipo de interés a corto plazo que se asume que sigue un proceso de difusión de Ito.

Desde la modelización desarrollada por Merton (1973), los modelos en tiempo continuo han sido los más utilizados en la modelización de los tipos de interés. Así, el propio Merton (1973) presenta un proceso estocástico para el tipo de interés a corto plazo que consiste en un Movimiento Aritmético Browniano con *drift* constante. Posteriormente, en Vasicek (1977) se reduce la probabilidad de obtener tipos de interés negativos, modelizando el *drift* como un proceso de reversión a la media; siendo en Cox, Ingersoll y Ros (CIR) (1985) donde se garantiza dicha positividad, haciendo incrementar la volatilidad al incrementar el nivel de los tipos, es decir, reflejando el llamado *efecto nivel*.

Los modelos unifactoriales, basados en el supuesto de que los cambios en los tipos de interés, para todos los plazos, vienen explicados por una única variable aleatoria fundamental, el tipo de interés a corto plazo, presentan la ventaja de ofrecer soluciones cerradas para la valoración de bonos y derivados, sin embargo, es difícil captar con ellos cambios en pendiente y curvatura. Tales cambios pueden llegar a representar hasta un 30% de los movimientos de la curva de tipos. Aun así, la evidencia empírica demuestra que las variaciones en la curva de tipos vienen explicadas, en su

mayor parte, por las variaciones en el nivel de los tipos de interés, por lo que la utilización de estos modelos, al sopesar sus ventajas e inconvenientes, continúa teniendo un importante atractivo.¹

La literatura financiera que aborda la modelización de la volatilidad de los tipos de interés a corto plazo en el contexto descrito puede agruparse en tres grandes grupos. En primer lugar se encuentran los modelos Nivel, los cuales especifican la volatilidad del tipo de interés a corto plazo únicamente en función de su nivel. El modelo empírico de Chan et al. (CKLS) (1992) anida en una sola expresión a estos modelos, siendo un caso particular de ellos los modelos de volatilidad constante de Vasicek (1977) y Merton (1973); en segundo lugar los modelos generalizados de heteroscedasticidad condicional autorregresiva o modelos GARCH, en los que la volatilidad es función de su propio pasado y del impacto de las innovaciones del tipo de interés a corto plazo; y por último, los modelos Mixtos que combinan el *efecto nivel* y el efecto GARCH, modelos que fueron introducidos inicialmente por Kearns (1992) aunque fueran, posteriormente, Brenner, Harjes y Kroner (BHK) (1996) los primeros en presentar resultados de su estimación.

El paso de los modelos de volatilidad constante a los modelos Nivel se debe a razones naturales, puesto que los primeros, no solo pueden dar lugar a tipos negativos, sino que el supuesto de volatilidad constante en series financieras es algo difícil de justificar. De ahí surgen modelos que intentan recoger la heteroscedasticidad condicional en la varianza, típica de las series financieras, haciendo depender la volatilidad del nivel de los tipos. La observación histórica de la serie de tipos de interés, pone de manifiesto la existencia de un *efecto nivel*, es decir, la existencia de una relación positiva entre volatilidad y nivel de los tipos. Sin embargo, la evidencia empírica ha demostrado que los modelos Nivel tienden a sobrestimar dicho efecto, principalmente por no recoger la correlación serial en la varianza condicional, correlación que los modelos GARCH captan con mayor precisión, recogiendo el *efecto agrupamiento*, propio de las series financieras con alta frecuencia. Sin embargo, estos últimos modelos también han recibido críticas variadas: la primera y más importante es la de no reflejar el impacto del nivel de los tipos sobre la volatilidad; en segundo lugar, presentan la indeseable propiedad de permitir tipos negativos; y, por último, en muchas

¹ Para el caso español, puede verse Navarro y Nave (2001b) en donde se comprueba que durante el periodo 01/1993 – 12/1996 las variaciones de nivel permitieron explicar el 77% de las variaciones mensuales de la ETTI, mientras que las de la pendiente y la curvatura representaron un 19% y 4% respectivamente.

aplicaciones empíricas se ha encontrado una alta persistencia de las innovaciones en la volatilidad, lo que puede dar indicios de no estacionariedad, dificultando el estudio de la serie.

Todos estos inconvenientes han llevado, en los últimos años, a la aparición de los modelos Mixtos, es decir, modelos en los que la volatilidad depende además del nivel del tipo de interés a corto plazo, de su propio pasado y del impacto de las innovaciones. Son ya bastante numerosos los estudios realizados en diferentes mercados, entre los que destacan los de Andersen y Lund (1997), Koedijk et al. (1997) y Bali (2000a y 2000b), en los que se demuestra que los modelos Mixtos permiten una mejor representación de la dinámica de la volatilidad de los cambios en el tipo de interés a corto plazo.

Sin embargo, en el mercado español, a pesar de encontrar trabajos que utilizan los modelos Nivel, como los de García Montalvo (1998) y Rico (2000), y los modelos GARCH, como los de Abad (2000) y Benito (2001), el análisis y/o aplicación de los modelos Mixtos, hasta donde llega nuestro conocimiento, no se ha llevado a cabo. Por otro lado, el particular periodo de tiempo al que se hace referencia así como los datos utilizados, son en sí mismos una característica diferenciadora de los trabajos arriba mencionados.

Así pues, en este contexto particular, el objetivo principal de este trabajo es el de corroborar la superioridad de los modelos Mixtos frente a los modelos Nivel y modelos GARCH, objetivo que se pretende alcanzar mediante el análisis de una amplia gama de modelos.

Para ello, el resto del trabajo se estructura del siguiente modo. En la siguiente sección se especifican los distintos modelos que se analizan posteriormente; en la sección tercera se describen los datos utilizados; mientras que la sección cuarta se dedica a la estimación de los modelos y a la presentación de los resultados obtenidos; por último, en la sección quinta se agrupan las principales conclusiones obtenidas en el trabajo.

2. Modelización unifactorial de los tipos de interés

Tal y como se ha comentado, este trabajo se centra en la modelización unifactorial del tipo de interés a corto plazo, r_t , en tiempo continuo, en donde se asume que sus movimientos siguen un proceso de difusión de Ito representado a través de una ecuación diferencial estocástica que rige dichos movimientos a través del tiempo del siguiente modo:

$$dr_t = \mu_t(r_t)dt + \sigma_t(r_t)dW_t, \quad (1)$$

en donde $\mu_t(r_t)$ es la deriva (*drift*) o esperanza condicional instantánea de la variación del tipo de interés por unidad de tiempo; el cuadrado de $\sigma_t(r_t)$ es la varianza condicional de la variación del tipo de interés por unidad de tiempo; y dW_t es un proceso de Wiener, siendo $dW_t \sim N(0, dt)$ para un t dado².

El componente determinístico de la expresión (1), es decir, $\mu_t(r_t)dt$, representa la dirección general hacia la que tiende el tipo de interés a corto plazo, mientras que el componente estocástico, $\sigma_t(r_t)dW_t$, produce continuas y aleatorias perturbaciones en sus movimientos.

A. Especificación del drift

Siguiendo a Vasicek (1977), se especifica el *drift* en la expresión (1), para todos los modelos, como un proceso de reversión a la media, $\mu_t(r_t) = k(\mu - r_t)$, donde r_t revierte hacia el tipo de interés medio a largo plazo μ , mientras k mide la velocidad de reversión a esa media. La hipótesis de reversión a la media implica la existencia, bajo condiciones normales, de un valor medio alrededor del cual los tipos de interés

² Una aproximación a los procesos estocásticos utilizados en la modelización de los tipos de interés mediante un enfoque fundamentalmente didáctico puede verse en el capítulo siete de Navarro y Nave (2001a).

reverten. De no ser así, la varianza de la distribución incrementaría sin límite con el paso del tiempo.³

Si el proceso de reversión es lineal, como en este caso, la velocidad de reversión hacia la media es constante para todos los niveles del tipo de interés a corto plazo. Sin embargo son varios los autores, como por ejemplo Aït-Sahalia (1996), los que indican que la reversión es mucho más fuerte para valores extremos que para valores medios, comportándose estos últimos como un paseo aleatorio, y que por tanto una especificación lineal de la media no recoge la distinta fuerza con la que tienden a su media a largo plazo los tipos según su nivel.⁴

No obstante, Koedijk et al. (1997) y Ball y Torous (1999) muestran que la especificación no lineal de la media, no tiene repercusión sobre las estimaciones de los parámetros de volatilidad estocástica. Por tanto, siendo la modelización de la volatilidad el objetivo fundamental de este trabajo, y dado que no existe evidencia clara en contra de los modelos de reversión a la media lineales, hemos optado por esta especificación para el *drift*.

B. Especificación de la volatilidad

B.1 Modelos Nivel

Una característica del comportamiento histórico de los tipos es que tienden a ser más volátiles cuanto más elevados son, aunque sólo se deba a motivos de escala. Este efecto, junto a la posibilidad de producir tipos negativos que tienen los modelos de volatilidad constante, como el de Vasicek (1977), se palia con el desarrollo de los modelos Nivel, en los cuales la volatilidad de las variaciones del tipo de interés a corto

³ Existen convincentes argumentos económicos, asociados a los ciclos económicos y a la demanda de fondos, a favor de este tipo de procesos. Cuando los tipos son elevados, la economía tiende a ralentizarse y se demandan menos fondos, como resultado, los tipos de interés bajan. Cuando los tipos son bajos, incrementa la demanda de fondos y los tipos de interés suben.

⁴ Existe toda una línea investigación centrada en la idoneidad del carácter lineal de la media que incluye entre otros los trabajos de Conley et al. (1997), Stanton (1997), Chapman y Pearson (2000) y Takamizawa y Shoji (2001). Existen también los llamados modelos TAR (*Threshold Autoregressive Models*) que modelizan el proceso en varios regímenes lineales dependiendo del valor que toma en el pasado una variable estado respecto a un parámetro umbral. En esta última línea destaca el trabajo de Pfann, Schotman y Tschernig (1996), y en España el trabajo de Vidiella y Alegre (2000).

plazo es función del nivel de los tipos. CKLS (1992) realizan un estudio empírico de estos modelos que anidan en la siguiente ecuación diferencial estocástica,⁵

$$dr_t = (\alpha_0 + \alpha_1 r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t, \quad (2)$$

en donde el *drift* es una reparametrización trivial del proceso de reversión a la media, $k(\mu - r_t)$, citado en el apartado anterior. El parámetro de difusión, σ , es meramente un factor de escala de la volatilidad; mientras que la presencia de r_t^γ , en el término de difusión, asegura tipos positivos e introduce la heteroscedasticidad condicional únicamente a través del nivel de los tipos, reflejando así el *efecto nivel*.⁶

Para la estimación de la ecuación (2) utilizamos la discretización de Euler⁷:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3)$$

con

$$\varepsilon_t \equiv h_t^{1/2} \eta_t; \quad \eta_t \sim iid N(0,1); \quad \varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, h_t);$$

⁵ Este modelo anida a los modelos de volatilidad constante y a los modelos Nivel más conocidos como son los de Merton (1973); Vasicek (1977); CIR (1985); Dothan (1978); Black y Scholes (1973); Brennan y Schwartz (1980); CIR (1980); Cox (1975) y Cox y Ross (1976).

⁶ En esta ecuación, α_0 representa la parte de la media del proceso de las variaciones del tipo de interés a corto plazo que es constante y α_1 es la velocidad de reversión del tipo de interés hacia su media de largo plazo, (α_0 / α_1) . Lógicamente para que exista reversión a la media, α_1 debe ser negativo. Puede verse que γ es el coeficiente de la elasticidad de la volatilidad respecto a r , valores de γ superiores a la unidad indican alta sensibilidad de la volatilidad al nivel de los tipos. La dinámica de la ecuación (2) implica que la media y la varianza condicional de los cambios en el tipo a corto dependen exclusivamente del nivel actual de los tipos; que el tipo a corto sigue un proceso de Markov, es decir, su evolución futura depende únicamente de su valor actual y no de su comportamiento pasado.

⁷ Respecto a la discretización utilizada por Nowman (1997), trabajos como los de Fiorentini, León y Rubio (2002) llegan a estimaciones muy próximas a las de Euler. Otras discretizaciones, demostradamente más eficientes que la de Euler (véase Baadsgaard y otros, 1996), como la de Milstein, la de Platen-Wagner y la de Ito-Taylor (véase Kloeden y Platen, 1992) son de un orden superior por lo que implican una complicación notacional y computacional importante, motivo éste suficiente, en palabras de Brandt y Santa-Clara (2002) para “elegir el popular procedimiento de discretización de Euler”. En este sentido James y Webber (2000:363) afirman que en base a su experiencia en las aplicaciones típicas de modelización de tipos de interés, los requerimientos computacionales adicionales requeridos al considerar aproximaciones de orden superior son demasiado grandes respecto de las ganancias que éstas reportan.

siendo I_{t-1} el conjunto de información disponible hasta el momento $t-1$. La ecuación de la varianza condicional para los modelos Nivel viene dada por la siguiente expresión:

$$h_t = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma} \quad (4)$$

B.2. Modelos GARCH

Es ampliamente reconocido que las series de tipos de interés presentan una fuerte heteroscedasticidad condicional en la varianza. El modelo de CKLS intenta recoger esta característica permitiendo a la volatilidad depender del nivel de los tipos. Sin embargo, los modelos Nivel no son capaces de captar completamente la heteroscedasticidad, al no recoger el *efecto agrupamiento* y la alta persistencia, propios de las series financieras, lo que a su vez provoca que sobrestimen la sensibilidad de la volatilidad al nivel de los tipos, tal y como se pone de manifiesto en BHK (1996), quienes consideran que $\gamma=1$ o $\gamma=1.5$ representan valores poco razonables de la sensibilidad de la volatilidad al nivel de los tipos, pues en el mercado de letras del tesoro americanas se han dado periodos históricos de estabilidad con tipos altos (por ejemplo de 1983 a 1984) y periodos de gran volatilidad con tipos bajos (finales de 1992 e inicio de 1993).⁸

Una clase diferente de modelos, que sí recogen tales características, son los modelos GARCH.⁹ Estos modelos especifican la varianza condicional en función de su propio pasado y del cuadrado de las observaciones pasadas del componente no anticipado de los tipos de interés.

Puesto que para todos los modelos mantenemos la misma especificación para la media condicional, la diferencia vendrá dada por la especificación para la ecuación de la

⁸ En esta misma línea se encuentran los trabajos de Koedijk et al. (1997) y Andersen y Lund (1997) entre otros muchos.

⁹ El modelo GARCH (p,q) fue presentado por Bollerslev (1986) como una generalización del modelo de Engel (1982) y aplicado a series de tipos de interés por Engle, Lilien y Robbins (1987); Engle, Ng y Rothschild (1990); y Engle y Ng (1993).

volatilidad condicional. De este modo la ecuación (4) para el modelo GARCH (1,1) será:¹⁰

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2. \quad (5)$$

El modelo GARCH tiene la consideración de simétrico, es decir, el efecto sobre la varianza de las innovaciones es independiente del signo de éstas. Sin embargo, la evidencia parece mostrar que las innovaciones positivas en los cambios de los tipos de interés (negativas en precios de bonos y rendimientos) tienen mayor impacto en la volatilidad que las innovaciones negativas de la misma magnitud.

Esta respuesta asimétrica de la volatilidad se conoce también como *efecto apalancamiento*, y para recogerlo han surgido los modelos asimétricos, que en realidad son generalizaciones del modelo GARCH simétrico. Cuatro son los modelos GARCH asimétricos que vamos a estimar. Todos ellos, junto a otros ampliamente utilizados, son anidados por la familia de modelos GARCH de Hentschel (1995).¹¹ La especificación del componente predecible de la volatilidad, la varianza condicional, para cada uno de ellos es la siguiente:

AGARCH (Asymmetric GARCH model), propuesto por Engle (1990)

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha (\varepsilon_{t-1} + \theta)^2; \quad (5.1)$$

NAGARCH (Nonlinear Asymmetric GARCH model), propuesto por Engle y Ng (1993)

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha (\varepsilon_{t-1} + \theta \sqrt{h_{t-1}})^2; \quad (5.2)$$

¹⁰ La utilización de la estructura GARCH (1,1) es un criterio estándar ampliamente aceptado, pues se ha comprobado que recoge suficientemente la estructura en volatilidad. Así la mayoría de los trabajos que analizan a los modelos Mixtos proponen para estos una estructura GARCH (1,1), como por ejemplo: Brenner et al. (1996), Koedijk et al. (1997), Andersen y Lund (1997b), Bali (1999, 2000a, 2000b), Koutmos (2000) y Ferreira (2000). Imponer modelos más complejos, con respecto a los órdenes de p y q, en la modelización de la heterocedasticidad condicional genera problemas en la estimación, ya que se tiene que estimar conjuntamente los parámetros del modelo de volatilidad condicional, los parámetros del modelo de la media y el valor de γ .

¹¹ Para un análisis detallado de estos modelos véase León y Mora (1999).

GJR-GARCH. (Threshold GARCH model), propuesto por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993)

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2, \quad (5.3)$$

con $D_{t-1}^+ = 1$ if $\varepsilon_{t-1} > 0$; $D_{t-1}^+ = 0$ en caso contrario.

Para los cuatro modelos asimétricos anteriores la obtención de un valor para el parámetro $\theta \neq 0$, implicará la existencia de respuesta asimétrica por parte de la volatilidad al impacto de innovaciones positivas o negativas. Concretamente, para $\theta > 0$, las innovaciones positivas causan mayor impacto sobre la volatilidad que las negativas de la misma magnitud.

Existen otro tipo de modelos, que modelizan directamente la volatilidad en lugar de la varianza, entre los que se encuentra el modelo TGARCH:

TGARCH (Threshold GARCH model), propuesto por Zakoian (1994),

$$h_t^{1/2} = \omega + \beta h_{t-1}^{1/2} + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ - \alpha^- \varepsilon_{t-1}^-, \quad (5.4)$$

con $\varepsilon_{t-1}^+ = \max(0, \varepsilon_{t-1})$ y $\varepsilon_{t-1}^- = \min(\varepsilon_{t-1}, 0)$; y $\alpha^+ > 0$ y $\alpha^- > 0$. Para $\alpha^+ \neq \alpha^-$ existirá respuesta asimétrica de la volatilidad. De este modo para $\alpha^+ > \alpha^-$, la intensidad de la volatilidad causada por las innovaciones positivas será mayor que la causada por las negativas de la misma magnitud.

B.3. Modelos Mixtos

Los modelos GARCH, tanto el simétrico como los asimétricos, adolecen de no recoger el impacto del nivel de los tipos de interés sobre la volatilidad de los cambios, es decir, el *efecto nivel*. Además, la mayoría de los trabajos empíricos muestran que $\hat{\beta} + \hat{\alpha} \approx 1$, es decir, que la varianza condicional no es estacionaria y por tanto los shocks presentes afectarán para siempre a la volatilidad futura, presentando además la indeseable propiedad de permitir tipos negativos. Por su parte, los modelos Nivel presentan, tal y como se ha comentado con anterioridad, tan sólo una especificación para el *efecto nivel* en la que, para $\gamma > 0$, incrementos de los tipos *necesariamente* implican incrementos de la volatilidad, mientras que disminuciones de los tipos

necesariamente implican disminuciones en la volatilidad; y lo más importante, no recogen completamente la correlación serial en la varianza condicional.

Por todos estos inconvenientes, BHK (1996), entre otros, proponen los modelos Mixtos, en donde se recoge el *efecto nivel* y el *efecto* GARCH simultáneamente, llegando a la conclusión de que CKLS (1992) sobrestiman la sensibilidad de la volatilidad al nivel de los tipos, ya que la incorporación de las innovaciones reduce la estimación del parámetro γ ; mientras que la incorporación del *efecto nivel* a los modelos GARCH mejora sus resultados, principalmente al reducir el nivel de persistencia de las innovaciones sobre la volatilidad.¹²

BHK (1996) sugieren la siguiente especificación para la varianza condicional de los cambios del tipo de interés a corto plazo:

$$h_t = \sigma_t^2 r_{t-1}^{2\gamma} \quad (6)$$

donde σ_t^2 presenta estructura GARCH (1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$

para el modelo Mixto simétrico.

También se considerarán modelos Mixtos asimétricos, es decir aquellos que, además de combinar el efecto nivel y el impacto de las innovaciones en los tipos, recogen la respuesta asimétrica de la volatilidad ante las innovaciones positivas y negativas. A tal efecto se aplica en la expresión (6) las correspondientes

¹² Muchos autores han seguido los pasos de BHK (1996) y así también podemos considerar modelos Mixtos a los desarrollados en Andersen y Lund (1997), Koedijk et al. (1997) y Bali (2000a, 2000b). Todos ellos analizan los tipos a corto plazo de Estados Unidos. Para Francia y Alemania tenemos estudios realizados por Ferreira (2000) y para Canadá, Japón y Reino Unido (además de Estados Unidos, Francia y Alemania) en Koutmos (2000).

especificaciones de σ_t^2 que desarrolla la expresión (5), en el apartado anterior, para cada uno de los modelos asimétricos¹³.

3. Descripción de los datos utilizados

Dado que el tipo de interés instantáneo, concepto formal de lo que a lo largo de este trabajo hemos denominado tipo de interés a corto plazo, es una variable no observable se necesita utilizar una *proxy* para llevar a cabo su estudio empírico.¹⁴ Para realizar esta elección hay que sopesar las ventajas e inconvenientes de elegir un tipo de interés a más corto plazo (como sería el diario) o uno a más largo plazo (el tipo de interés a tres meses, por ejemplo). Por un lado, el tipo de interés a tres meses se aleja bastante del concepto de tipo de interés instantáneo, sin embargo un tipo de interés a más corto plazo puede recoger las tensiones de liquidez propias del segmento del mercado monetario y de regulación financiera del que se extraen.

Nuestra elección es la de trabajar con tipos de interés mensuales, con frecuencia diaria, derivados de las operaciones simultáneas al contado con Bonos y Obligaciones del Estado, al igual que se hace en la mayoría de los trabajos revisados de la literatura, con la ventaja adicional de que es la serie que presenta el menor número de valores *outliers* de entre las inicialmente consideradas – ningún valor sobrepasa dos veces la desviación estándar.¹⁵

¹³ Los modelos Mixtos asimétricos anidan: (1) a su correspondiente modelo GARCH asimétrico con $\gamma = 0$; (2) al modelo Nivel-GARCH con $\theta = 0$; (3) al modelo GARCH con $\theta = \gamma = 0$; y (4) al modelo de CKLS con $\beta = \alpha = 0$ y $\omega = \sigma^2$. La especificación TGARCH, al estar definida para la desviación, no puede anidar ninguna de las especificaciones GARCH simétricas, de modo que (2) y (3) no se cumplen para el modelo Nivel-TGARCH.

¹⁴ En este sentido, apuntar que CKLS (1992) y Longstaff y Schwartz (1992) utilizan el tipo de interés de las Letras del Tesoro americanas a un mes; Anderson y Lund (1997) y Stanton (1997) utilizan esos mismos títulos pero a tres meses; Nowman (1997), el tipo de interés interbancario a un mes en Gran Bretaña; Ait-Sahalia (1996) utiliza el tipo Eurodolar a una semana.

¹⁵ Chapman, Long y Pearson (1999) muestran que el problema de la elección de la *proxy* no es económicamente significativo en el contexto de modelos afines unifactoriales, que son los aquí tratados. Únicamente representa un problema a tener en cuenta en el caso de modelos afines de dos factores para la valoración de bonos con un periodo de madurez superior a cinco años y en el caso de modelos unifactoriales no lineales.

En cuanto a la frecuencia de los datos hemos preferido observaciones diarias porque ofrecen una mejor aproximación discreta al tiempo continuo. Según Campbell (1986) si los cambios en el tipo se miden para periodos de tiempo cortos, el error de aproximación es de segundo orden. Por otro lado, presenta la ventaja añadida de proporcionar un mayor número de observaciones lo que va a permitir una mejor estimación de los modelos, especialmente la de los modelos GARCH.

En cuanto al tipo de operación de referencia se ha elegido las Operaciones Simultáneas al Contado, operativamente equivalentes a los *repos* negociados en otros mercados europeos y de EEUU. Los tipos de interés derivados de estas operaciones se calculan bajo el régimen de capitalización simple y año comercial, y sus series históricas en porcentajes anualizados se publican en formato electrónico en el Boletín de la Central de Anotaciones del Banco de España. Esta serie se ha transformado a tipos de interés compuestos continuos.

Los datos cubren el periodo comprendido entre agosto de 1994 y diciembre de 2000, en total 1594 observaciones diarias. En el Gráfico 1 se muestra la serie del tipo de interés mensual junto a su primera diferencia, y puede apreciarse como la volatilidad se presenta por grupos (*clustering variance*) y como, también la volatilidad, en términos generales, ha sido mayor para periodos de tipos altos (*efecto nivel*).

En la Tabla 1 se muestran los estadísticos descriptivos del tipo a un mes y su primera diferencia. La media de los cambios es negativa, lo cual indica que las caídas en el tipo de interés a un mes durante el periodo analizado han sido más importantes que las subidas, como obviamente se aprecia en el Gráfico 1. El valor máximo se alcanzó el 26 de septiembre de 1995, el mínimo el 22 de diciembre de 1998. La subida más alta se produjo el 9 de junio de 1995, y la mayor caída el 7 de junio de 1995. El estadístico de Jarque-Bera rechaza normalidad, tanto para la serie al nivel como para su primera diferencia, resultado lógico si observamos la leptocurtosis y asimetría a la izquierda de la primera diferencia.

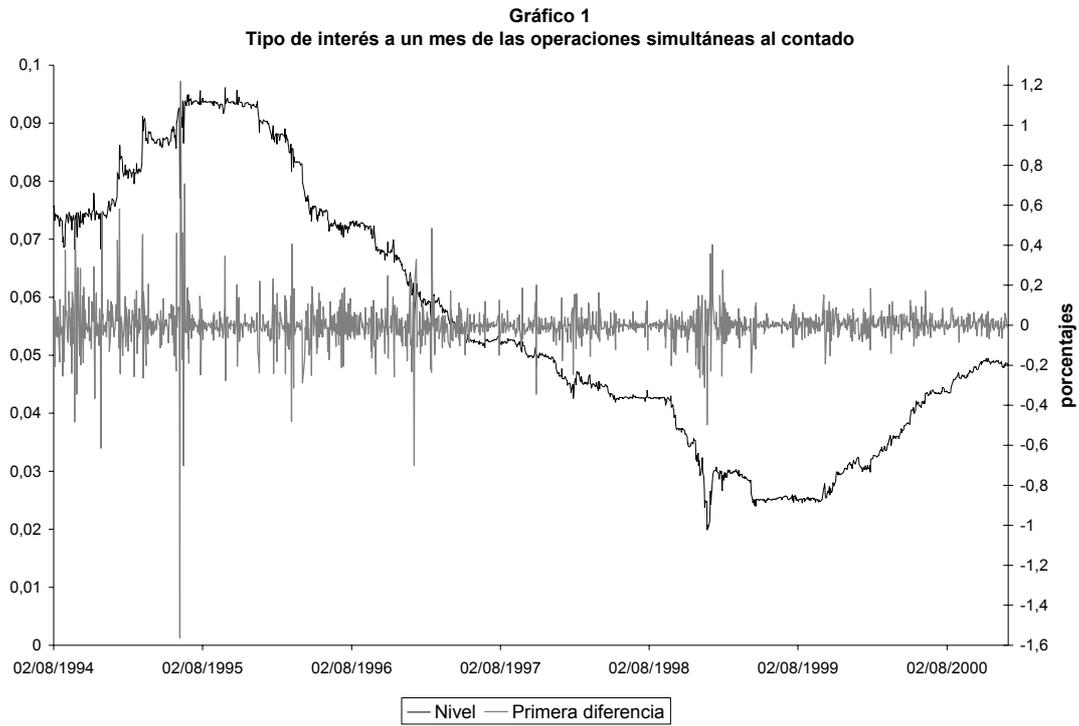


Tabla 1. Estadísticos descriptivos del tipo de interés a un mes y su primera diferencia (expresados en porcentaje)

	Tipo de interés a un mes	Primera diferencia
Media	5,5818	-0,0017
Mediana	5,0000	-0,0015
Máximo	9,6150	1,2204
Mínimo	1,9854	-1,5633
Desviación	2,1836	0,1054
Asimetría	0,3076	-1,0165
Curtosis	1,8495	51,6340
Jarque-Bera Probabilidad	113,0533 0	157268,9000 0

En el Gráfico 1 se muestra la evolución tanto de la serie al nivel como de su primera diferencia. En la Tabla 2, los elevados coeficientes de correlación y la lentitud con la que decaen muestran evidencia de la posible presencia de raíz unitaria para la serie al nivel. El test de raíces unitarias de Dickey-Fuller Aumentado acepta la existencia de raíz unitaria¹⁶ en la serie al nivel. Sin embargo su primera diferencia, presenta coeficientes de correlación pequeños y no sistemáticamente positivos o negativos, y el test Dickey-Fuller Aumentado corrobora la inexistencia de raíz unitaria para esta serie.

Tabla 2. Coeficientes de autocorrelación y test de raíz unitaria

El Test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) para la serie del tipo de interés a un mes incluye constante y tendencia. Para la serie de su primera diferencia no incluye ni constante ni tendencia. El número de retardos utilizado es de 4. El valor crítico se presenta al 10%.

	Tipo de interés a un mes	Primera diferencia
ρ_1	0,999	-0,210
ρ_2	0,998	-0,179
ρ_3	0,997	0,051
ρ_4	0,996	0,026
ρ_5	0,996	-0,077
ρ_6	0,995	-0,028
ρ_7	0,995	0,107
ADF	-0,3502	-22,225
Valor crítico	-3,1294	-1,6157

¹⁶ El test de Dickey-Fuller se caracteriza por ser un test de baja potencia, esto implica que realmente pudiera haber más evidencia de raíz cuasi-unitaria que raíz unitaria, que es lo que detecta el test al aceptarse. Bajo el supuesto de raíz cuasi-unitaria, la modelización de la ecuación (3) sería consistente, pues la variable dependiente (serie en diferencias) que es I(0) puede explicarse mediante la serie en nivel que no sería I(1), siendo por tanto el error I(0).

4. Estimación y resultados

Todos los modelos han sido estimados mediante máxima verosimilitud restringida¹⁷, asumiendo que las perturbaciones son independientes y están idénticamente distribuidas. La estimación máximo verosímil (MV) exige especificar una distribución para las perturbaciones, y generalmente se supone normalidad. De este modo el logaritmo de la función de verosimilitud será:

$$\ln f(\Theta) = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln h_t - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right], \quad (7)$$

donde Θ es el verdadero vector de parámetros de la media y varianza condicional.

El alto nivel de leptocurtosis de la serie hace difícil justificar el supuesto de distribución condicional normal de las innovaciones, es por este motivo que las estimaciones llevadas a cabo presentan unos estadísticos t basados en los errores estándar calculados según el procedimiento de *cuasi máxima verosimilitud* (QML), que son robustos ante una incorrecta especificación de las distribuciones supuestas en la estimación [Bollerslev y Wooldridge (1992)]. El estimador cuasi máximo verosímil es consistente y asintóticamente normal, siempre que la media y la varianza estén correctamente especificadas.¹⁸

Al igual que en BHK (1996), utilizamos MV frente al método generalizado de los momentos (MGM), a pesar de que aquel exija la especificación de una distribución, pues MGM parece presentar mayores problemas. Broze, Scaillet y Zokoian (1995) demuestran que el estimador MGM no se comporta bien para valores de $\gamma > 1$ en los modelos Nivel. Cuando $\gamma > 1$, r_t sigue un proceso no estacionario, que infringe los supuestos del método generalizado de los momentos.¹⁹

¹⁷ Todas las estimaciones se han obtenido utilizando la librería CML de GAUSS.

¹⁸ Un camino alternativo es el utilizado por BHK (1996), asumen una distribución t -student, que proporciona la flexibilidad necesaria para capturar la leptocurtosis de los tipos de interés. Sin embargo estudios como los de Koedijk et al. (1997) y Andersen y Lund (1997) demuestran que la estimación de los parámetros y sus errores estándar no experimentan cambios importantes al pasar del supuesto de normalidad a la distribución t -student.

¹⁹ Otros autores que también utilizan máxima verosimilitud son Koedijk et al. (1997), Nowman (1997) y Bali (2000a, 2000b)

En la Tabla 3 se presentan los resultados de la estimación del modelo Nivel general (CKLS) y de los modelos GARCH (uno simétrico y cuatro asimétricos). En la Tabla 4 se muestran las estimaciones para los modelos Mixtos y, por último, en la Tabla 5 las estimaciones de los modelos TGARCH y Nivel-TGARCH.

Tabla 3. Estimación del modelo Nivel general (CKLS) y de los modelos GARCH.

Los parámetros han sido estimados a partir de las siguientes especificaciones econométricas:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = h_t^{1/2} \eta_t, \quad \eta_t \sim iid N(0,1)$$

CKLS	$h_t = \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma}$
GARCH	$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$
AGARCH	$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha (\varepsilon_{t-1} + \theta)^2$
GJR	$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2$ $D_{t-1}^+ = 1$ si $\varepsilon_{t-1} > 0$; $D_{t-1}^+ = 0$ si no
NAGARCH	$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha (\varepsilon_{t-1} + \theta \sqrt{h_{t-1}})^2$

	α_0	α_1	σ	γ	ω	β	α	θ	Log-L	SIC
CKLS	0.0070 (0.996)	-0.0015 (-1.107)	0.0324 (4.373)	0.6608 (4.546)	-----	-----	-----	-----	2938.64	2923.90
GARCH	0.0049 (1.159)	-0.0014 (-1.443)	-----	-----	0.0001 (0.0)	0.7082 (9.601)	0.4290 (3.404)	-----	3381.90	3363.47
AGARCH	0.0072 (1.047)	-0.0017 (-1.283)	-----	-----	0.0001 (0.0)	0.7096 (10.058)	0.4217 (3.540)	0.0052 (0.792)	3383.23	3361.11
GJR	0.0066 (1.333)	-0.0015 (-1.481)	-----	-----	0.0001 (0.0)	0.6980 (8.883)	0.3491 (3.327)	0.1919 (1.143)	3386.24	3364.12
NAGARCH	0.00942 (1.222)	-0.0019 (-1.297)	-----	-----	0.0001 (1.4961)	0.6634 (6.616)	0.4569 (2.810)	0.2192 (1.196)	3382.48	3360.36

Resultados de la estimación por máxima verosimilitud con desviaciones típicas robustas de Bollerslev y Wooldridge (1992). Estadístico t entre paréntesis. Log-L es el logaritmo de la función de verosimilitud y SIC el Criterio de Información de Schwarz.

Tabla 4. Estimación de los modelos Mixtos.

Los parámetros han sido estimados a partir de las siguientes especificaciones econométricas

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = h_t^{1/2} \eta_t, \quad \eta_t \sim iid N(0,1)$$

con
$$h_t = \sigma_t^2 r_{t-1}^{2\gamma},$$

y donde σ_t^2 presenta las siguientes estructuras GARCH:

Nivel-GARCH
$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$

Nivel-AGARCH
$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \theta)^2$$

Nivel-GJR
$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2; \quad D_{t-1}^+ = 1 \text{ if } \varepsilon_{t-1} > 0; \quad D_{t-1}^+ = 0 \text{ si no.}$$

Nivel-NAGARCH
$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \theta\sigma_{t-1})^2$$

	α_0	α_1	σ	γ	ω	β	α	θ	Log-L	SIC
Nivel-GARCH	0.0044 (1.252)	-0.0014 (-1.798)	-----	0.3209 (3.526)	0.00009 (0.0)	0.6572 (9.268)	0.1546 (2.591)	-----	3406.42	3384.30
Nivel-AGARCH	0.0050 (1.317)	-0.0013 (-1.718)	-----	0.3252 (3.594)	0.00009 (0.0)	0.6576 (9.352)	0.1529 (2.642)	0.0048 (0.926)	3407.45	3381.64
Nivel-GJR	0.0043 (1.2649)	-0.0012 (-1.622)	-----	0.3135 (3.490)	0 (0.0)	0.6495 (9.359)	0.1366 (2.4683)	0.0594 (1.072)	3409.00	3383.20
Nivel-NAGARCH	0.0051 (1.369)	-0.0010 (-1.329)	-----	0.3244 (3.492)	0.0001 (0.0)	0.6008 (7.316)	0.1725 (2.632)	0.3622 (1.3025)	3412.59	3386.78

Resultados de la estimación por máxima verosimilitud con desviaciones típicas robustas de Bollerslev y Wooldridge (1992). Estadístico t entre paréntesis. Log-L es el logaritmo de la función de verosimilitud y SIC el Criterio de Información de Schwarz.

Tabla 5. Estimación de los modelos GARCH y Mixto con especificación TGARCH.

Los parámetros han sido estimados a partir de las siguientes especificaciones econométricas:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = h_t^{1/2} \eta_t, \quad \eta_t \sim iid N(0,1)$$

donde para el modelo TGARCH

$$h_t^{1/2} = \omega + \beta h_{t-1}^{1/2} + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ - \alpha^- \varepsilon_{t-1}^-$$

y para el modelo Nivel-TGARCH

$$h_t = \sigma_t^2 r_{t-1}^{2\gamma}, \text{ con } \sigma_t = \omega + \beta \sigma_{t-1} + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ - \alpha^- \varepsilon_{t-1}^-$$

siendo

$$\varepsilon_{t-1}^+ = \max(0, \varepsilon_{t-1}) \text{ y } \varepsilon_{t-1}^- = \min(\varepsilon_{t-1}, 0)$$

	α_0	α_1	σ	γ	ω	β	α^+	α^-	Log-L	SIC
TGARCH	0.0074 (1.242)	-0.0018 (-1.700)	-----	-----	0.0027 (1.700)	0.7490 (11.987)	0.4171 (4.410)	0.2913 (3.748)	3380.63	3358
Nivel-TGARCH	0.0047 (3.237)	-0.0013 (-0.0004)	-----	0.3547 (3.683)	0.0026 (2.261)	0.7094 (12.920)	0.2318 (4.363)	0.1750 (3.634)	3411.37	3385.56

Resultados de la estimación por cuasi máxima verosimilitud con desviaciones típicas robustas de Bollerslev y Wooldridge (1992). Estadístico t entre paréntesis. Log-L es el logaritmo de la función de verosimilitud y SIC el Criterio de Información de Schwarz.

Analizamos en primer lugar los resultados obtenidos para modelo de CKLS donde para el parámetro γ obtenemos un valor de 0.66, resultado consistente con el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) y con las estimaciones realizadas en España por Rico (2000) para modelos Nivel. Rico (2000), con repos a un día, y para el periodo comprendido entre abril de 1993 y diciembre de 1995, estima para el modelo de CKLS no restringido un valor de $\gamma=0.556$, indicando que “*uno de los modelos que con mayor éxito explica la dinámica del tipo de interés a corto plazo es el modelo de equilibrio general de un factor de Cox, Ingersoll y Ross*”. Conclusión a la que también se llegaría en este papel si únicamente se hubieran estimado modelos de Nivel, es decir, de no estimar posteriormente modelos GARCH y modelos MIXTOS.

Sin embargo, también para datos españoles, García Montalvo (1998) lleva a cabo un análisis de los modelos de nivel que CKLS anida, obteniendo para el modelo

general valores de γ siempre superiores a la unidad, ratificando las conclusiones de CKLS. Esta diferencia en la estimación de la sensibilidad de la volatilidad al nivel puede deberse a varios motivos. En primer lugar, García Montalvo (1998) utiliza el tipo de interés interbancario frente a las operaciones simultáneas al contado utilizadas en el presente trabajo. En segundo lugar, a la distinta frecuencia de los datos, mensual frente a diaria. Y por último al distinto método de estimación, MGM frente a MV.

Por otro lado los resultados en la estimación de γ para los modelos Mixtos son coherentes con los obtenidos por BHK (1996), Andersen y Lund (1997), Koedijk et al. (1997) y Ferreira (2000) entre otros autores, en cuanto a la reducción del *efecto nivel* al introducir el impacto de las innovaciones, es decir, al pasar de los modelos Nivel a los modelos Mixtos, aunque la intensidad de esta disminución suele variar de unos estudios a otros, y dentro de un mismo estudio al cambiar de *proxy*.

En cuanto a la estimación de los parámetros para la media condicional, los modelos Mixtos en varianza (véase Tabla 4) son los que mayor evidencia de reversión a la media muestran (sus estadísticos son mayores en valor absoluto). El resto de modelos proporciona valores de $\alpha_1 < 0$, pero no significativos, siendo éste un resultado común en muchos trabajos empíricos²⁰

La comparación de los distintos modelos estimados se lleva a cabo atendiendo al Criterio de Información de Schwarz (SIC). Este criterio compara modelos mediante la expresión:

$$SIC = \log(L_{MV}) - (q/2) \log T, \quad (8)$$

en donde L_{MV} es la función de máxima verosimilitud del modelo evaluada en los estimadores máximo verosímiles, T es el número de observaciones y q el número de parámetros a estimar. Esta expresión, desarrollada por Schwarz (1978), evalúa la bondad de un determinado modelo mediante el grado de verosimilitud alcanzada, penalizándola por el número de parámetros utilizados para ello. Por tanto, los modelos con mayor SIC serán los que mejor se ajusten a los datos.

²⁰ CKLS (1992), Brenner et al. (1996), García Montalvo (1998), Ferreira (2000), Koutmos (2000), Aït-Sahalia (1996) y Stanton (1997)

De este modo observamos como los modelos GARCH superan en ajuste al modelo Nivel general (CKLS); y a su vez los modelos Mixtos superan a los modelos GARCH. Es decir, los modelos que especifican la volatilidad únicamente en función de las innovaciones captan mejor la volatilidad que aquellos que lo hacen únicamente en función del nivel, corroborando de este modo las conclusiones de BHK (1996), Koutmos (2000) y Bali (2000b). Sin embargo, la combinación del *efecto nivel* y del impacto de las innovaciones mejora cualquier especificación que considere ambas características por separado.

Los modelos Mixtos no sólo son los que mejor recogen la volatilidad, sino que también presentan otras importantes mejoras frente al resto. Respecto al modelo de CKLS, evitan sobrestimar la importancia del *efecto nivel*. Y con respecto a los modelos GARCH, reducen la alta persistencia de las innovaciones sobre la volatilidad. Así, como puede observarse en la Tabla 3, la suma de los valores estimados para los parámetros β y α en los modelos GARCH supera la unidad, al igual que sucede en BHK (1996), Bali (2000b), Ferreira (2000). Sin embargo, al incorporar el *efecto nivel* se produce una disminución en el valor de los parámetros β y α , especialmente del segundo, lo que permite que dejen de ser explosivos. Este resultado sugiere que el alto nivel de persistencia encontrado en los modelos GARCH pueda deberse a una mala especificación de la volatilidad al ignorar el *efecto nivel*, que si recogen los Mixtos.

En la Tabla 4 se observa la gran reducción que ha experimentado la sensibilidad de la volatilidad a las innovaciones, α , al pasar de los modelos GARCH a los Mixtos; mientras que el parámetro asociado a la varianza condicional del periodo anterior, β , experimenta una reducción muy pequeña y no en todos los modelos, lo que unido al elevado valor estimado y a su alta significatividad, corrobora la idea de un fuerte comportamiento inercial de la volatilidad de los tipos de interés.

Al objeto de contrastar la existencia de los *efectos nivel* y GARCH llevamos a cabo el contraste de razón de verosimilitud desarrollado en la Tabla 6. La hipótesis nula para el contraste del *efecto nivel* viene dada por la restricción $\gamma = 0$, con la cual los modelos Mixtos anidan a los modelos GARCH correspondientes, para los cuales la volatilidad no depende del nivel. La hipótesis nula para el contraste del efecto GARCH viene dada por la restricción $\beta = \alpha = 0$, bajo la cual los modelos Mixtos anidan a CKLS, modelo que no tiene en cuenta el impacto de las innovaciones sobre la volatilidad. Ambas hipótesis nulas son rechazadas.

Tabla 6. Contraste de razón de verosimilitud para el efecto nivel y efecto GARCH

El contraste de razón de verosimilitud (likelihood ratio: LR) viene dado por la siguiente expresión: $LR = -2(\text{Log } L^* - \text{Log } L)$, siendo $\text{Log } L^*$ el valor del logaritmo de la función de verosimilitud evaluada bajo la hipótesis nula y $\text{Log } L$ bajo la hipótesis alternativa. El estadístico LR se distribuye asintóticamente como una χ^2 con grados de libertad igual al número de restricciones bajo la hipótesis nula. Los valores críticos para uno y dos grados de libertad al 5% son $\chi^2_{(1,0.05)} = 3.84$ y $\chi^2_{(2,0.05)} = 5.99$

Panel A.		Estadístico LR
Contraste de efecto nivel		
$H_0 : \gamma = 0$	H_1	
Modelo	Modelo	
GARCH	Nivel-GARCH	49.04
AGARCH	Nivel-AGARCH	48.44
GJR	Nivel-GJR	45.52
NAGARCH	Nivel-NAGARCH	60.22
TGARCH	Nivel-TGARCH	61.48

Panel B.		Estadístico LR
Contraste de efecto GARCH		
$H_0 : \beta = \alpha = 0$	H_1	
Modelo	Modelo	
CKLS	Nivel-GARCH	931

La hipótesis $\gamma = 0$ es rechazada por todos los modelos, luego podemos concluir que existe *efecto nivel* y que, por tanto, el nivel de los tipos de interés si influye sobre la volatilidad. Del mismo modo, también se acepta la existencia de un fuerte efecto GARCH al ser rechazada la hipótesis nula con una importante holgura. La aceptación de ambos efectos pone de manifiesto la necesidad de modelizar la volatilidad en función del nivel y del impacto de las innovaciones, volviendo a corroborar la superioridad de los modelos Mixtos.

Con respecto al *efecto apalancamiento*, los modelos de volatilidad, es decir, los modelos TGARCH y Nivel-TGARCH, son los únicos que estiman parámetros de asimetría significativos, mostrando que la volatilidad es más sensible a las innovaciones positivas que a las negativas (véase Tabla 5). Este resultado esta en la línea de los obtenidos por Bali (2000a, 2000b), Ferreira (2000) y Amin y Ng. (1997) y sería consistente con el *efecto apalancamiento* en precios. Sin embargo la evidencia

internacional sobre tal efecto en los tipos de interés es contradictoria, pues también existen trabajos, como el de Andersen y Lund (1997b), en el que no se encuentra evidencia alguna de respuesta asimétrica de la volatilidad, o el de BHK (1996) en el que la evidencia encontrada indica que existe una mayor respuesta de la volatilidad a las innovaciones negativas que a las positivas.

Y por último no parece existir ninguna relación entre el *efecto nivel* y el *efecto apalancamiento*. La introducción del *efecto nivel* en los modelos GARCH asimétricos no provoca cambios importantes en la estimación de los parámetros de asimetría. De hecho los mismos modelos que presentaban parámetros de asimetría significativos en los modelos GARCH, continúan manteniéndolos en los modelos Mixtos; y aquellos que no manifestaban ningún *efecto apalancamiento* continúan sin manifestarlo. Por otro lado, y lógicamente dentro de los modelos Mixtos, observamos que la introducción de la respuesta asimétrica de la volatilidad a las innovaciones positivas y negativas, no provoca cambios importantes en la estimación del parámetro γ , es decir, no altera la sensibilidad de la volatilidad al nivel.

5. Conclusiones

En este trabajo se han analizado tres grandes grupos de modelos para la volatilidad de los cambios en el tipo de interés a corto plazo en España: los llamados modelos Nivel, anidados por el modelo empírico de CKLS (1992); los modelos GARCH, el simétrico y cuatro asimétricos; y los modelos Mixtos propuestos por BHK (1996), para los cuales la volatilidad es función tanto del nivel de los tipos como del impacto de las innovaciones.

Los resultados nos llevan a corroborar, también para el mercado español, las conclusiones de BHK (1996). Los modelos Mixtos mejoran cualquier especificación de la volatilidad que considere por separado el *efecto nivel* y el impacto de las innovaciones. Así el modelo Nivel general de CKLS muestra una estimación de la sensibilidad al nivel de los tipos que se ve reducida al incorporar el impacto de las innovaciones, indicando que los modelos de Nivel tienden a sobrestimar tal efecto debido a una mala especificación de la volatilidad. Por su parte la familia de modelos GARCH ve reducido el alto nivel de persistencia que muestra su volatilidad al incorporarle el *efecto nivel*. La inexistencia de relación funcional entre la volatilidad y el nivel de los tipos es una de las grandes críticas que reciben los modelos GARCH.

Aunque no todos los modelos asimétricos presentan parámetros de asimetría significativos, si que el modelo Nivel-TGARCH lo hace, siendo uno de los que mejor ajuste presenta, muestra la existencia de una mayor respuesta de la volatilidad ante las innovaciones positivas que antes las negativas de la misma magnitud. Es decir, la volatilidad es más sensible ante incrementos inesperados de los tipos de interés que ante disminuciones, corroborándose igualmente un resultado generalizado en los mercados financieros: las innovaciones negativas en precios provocan un aumento de la volatilidad superior al provocado por las innovaciones positivas.

Referencias bibliográficas

- Abad, P. (2000): "La estructura temporal de volatilidades en el mercado de swaps de tipos de interés". Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.
- Aït-Sahalia, Y. (1996): "Testing continuous time models of the spot interest rate", *Review of Financial Studies* Vol. 9, No. 2, 385-426.
- Amin, K. y V. Ng (1997): "Inferring future volatility from the information in implied volatility in Eurodollar Options: A new approach." *Review of Financial Studies* 10, 333-367.
- Andersen, T. y J. Lund (1997): "Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate", *Journal of Econometrics* 77, 343-377.
- Andersen, T. y J. Lund (1997b): "Stochastic volatility and mean drift in the short rate difusión: sources of steepness, level and curvature in the yield curve." Working paper n. 214, Northwestern University, Kellogg Graduate School of Management.
- Baadsgaard, J.N. Nielsen, H. Madsen y M. Preisel (1996): "Sampling techniques in stochastic differential equations", *Working Paper, The Technical University of Denmark*
- Bali, T.G (2000a): "Modelling the conditional mean and variance of the short rate using diffusion, GARCH, and moving average models", *Journal of Futures Markets*, Vol. 20, No. 8, 717-551.
- Bali, T.G (2000b): "Testing the empirical performance of stochastic volatility models of the short-term interest rate", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.35, No. 2 (June), 191-215
- Ball, C. y W. Torous (1999): "The stochastic volatility of short-term interest rates: International evidence" *Journal of Finance* Vol. 54, No. 6, 2339-2359.
- Benito, S. (2001): "Factores comunes en los Niveles y la volatilidad de los tipos cupón cero de la Deuda Pública española". Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.
- Black y M. Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- Bollerslev, T. (1986): "Generalized autorregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 307-320.
- Bollerslev, T. y J. Wooldridge (1992): "Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariance", *Econometric Reviews* 11, 143-172
- Brandt M. y P. Santa-Clara (2002): "Simulated likelihood estimation of diffusions with an application to exchange rate dynamics in incomplete markets", *Journal of Financial Economics*, 63, 161-210

- Brennan, M. y E. Schwartz (1980): "Analyzing convertible bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 907-929.
- Brenner, R.J., R. Harjes y K. Kroner (1996): "Another look at models of the short term interest rate", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31, 85-107.
- Broze, L., O. Scaillet y J. Zakoian, (1995): "Testing for continuous-time models of the short-term interest rate", *Journal of Empirical Finance* 2, 199-223
- Campbell, J. (1986): "A defence of traditional hypothesis about the term structure of interest rates", *Journal of Finance*, 41, 183-193.
- Chan, K., A. Karolyi, F. Longstaff y A. Sanders (1992): "An empirical comparison of models of short term interest rates", *Journal of Finance* 47, 1209-1227
- Chapman, D.A., J.B. Long, y N.D. Pearson (1999): "Using proxies for the short rate: When are three months like an instant?", *Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 4, 763-806.
- Champan, D.A. y N.D. Pearson (2000): "Is the short rate *drift* actually nonlinear?", *Journal of Finance*, Vol.55, No. 1 (February), 335-388.
- Conley, T.G., L.P. Hansen, E.G. J. Luttmer y J.A. Scheinkman (1997): "Short-term interest rates as subordinated diffusions", *Review of Financial Studies*, Vol. 10, 525-577.
- Cox, J. (1975): "Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions", *Working paper*, Stanford University.
- Cox, J., J. Ingersoll y S.Ross (1980): "An analysis of variable rate loan contracts", *Journal of Finance* 35, No. 2, 389-403
- Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985): "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, 385-407
- Cox, J y S. Ross (1976): "The valuation of options for alternative stochastic processes", *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. ½, 145-166.
- Dothan, L.U. (1978): "On the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics* Vol. 6, No. 1, 59-69.
- Engle, R. (1982): "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance U.K. inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No.4, 987-1008
- Engle, R. (1990): "Discussion: Stock market volatility and the Crash of '87", *Review of Financial Studies*, 3 , 103-106.
- Engle, R., D. Lilien, y R. Robins (1987): "Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M Model", *Econometrica*, Vol. 55, No.2, 391-407.
- Engle, R. y V. Ng (1993): "Measuring and testing the impact of news on volatility", *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, 1749-1778.

- Engle, R., V. Ng y M. Rothschild (1990): "Asset pricing with factor ARCH covariance structure evidence for Treasury bills", *Journal of Econometrics* 45, 213-238.
- Ferreira, M. (2000): "Testing models of the spot interest rate volatility", Mimeo, <http://home.iscte.pt/~mlaf/>
- García Montalvo, J. (1998): "Tipos de interés a corto Plazo en España", *Revista de Economía Aplicada*, No 18, Vol VI, 5-26.
- Glosten, L., R. Jagannathan y D. Runkle (1993): "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks", *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
- Hentschel, L. (1995): "All in the family: Nesting symmetric and asymmetric GARCH models". *Journal of Financial Economics* 39, 71-104.
- James J. y N. Webber (2000): "Interest rate modelling", John Wiley & Sons, Ltd. England
- Kearns, P. (1992): "Pricing interest rate derivative securities when volatility is stochastic", Manuscript University of Rochester, Rochester, NY.
- Kloeden P.E. y E. Platen (1992): "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations". *Springer, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability*, 23
- Koedijk, K., F. Nissen, P. Schotman y C. Wolff (1997): "The dynamics of short-term rates volatility reconsidered" *European Finance Review* 1, 105-130
- Koutmos, G. (2000): "Modelling short-term interest rate volatility: information shocks versus interest rate levels", *Journal of Fixed Income*, Vol. 9, No. 4, 19 - 26
- León, A. y J. Mora (1999): "Modelling conditional heteroskedasticity: Application to the "IBEX-35" stock-return index", *Spanish Economic Review* 1, 215-238.
- Longstaff, F. y E. Schwartz (1992): "Interest rate volatility and the term structure: A two factor general equilibrium model", *Journal of finance*, Vol. 47, No. 4, 1259-1282.
- Merton, R. (1973): "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183
- Navarro, E., J.M. Nave (2001a): *Fundamentos de matemáticas financieras*. Ed. Antoni Bosch.
- Navarro, E., J.M. Nave (2001b): "The structure of spot rates and immunization: Some further results", *Spanish Economic Review* 3, 273-294
- Nelson, D.B. y C.Q., Cao, (1992): "Inequality constraints in the univariate GARCH model", *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 229-235.
- Nowman, K. (1997): "Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates", *Journal of Finance*, Vol. 52, No. 4, 1695-1706.

- Pfann, G.A., P.C. Schotman, y R. Tschernig, (1996): "Nonlinear interest rate dynamics and implications for the term structure", *Journal of Econometrics* 74, 149-176.
- Rico, P. (2000): "Procesos estocásticos del tipo de interés a corto plazo", *Revista de Economía Aplicada*, No. 22, Vol VIII, 57-70.
- Schwarz, G. (1978): "Estimating the dimension of a model", *Annals of Statistics* 6, 461-464
- Stanton, R. (1997): "A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk", *Journal of Finance* Vol. 52, No. 5, 1973-2002 .
- Takamizawa, H. y I. Shoji, (2001): "Approximation of non-linear term structure models " *Journal of Derivatives*, Vol. 8, No. 3 (Spring), 44-51.
- Vasicek, O. (1977): "An equilibrium characterization of the term structure of interest", *Journal of Financial Economics* Vol. 5, No. 2, 177-188.
- Vidiella Anguera, A. y A. Alegre Escolano (1999): "Modelización del tipo de interés a corto plazo con modelos TAR: una aplicación al caso español", *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 5, 143-158.
- Zakoian, J. (1994): "Threshold heteroskedastic models", *Journal of Economic and Control* 18, 931-995.